# 第二单元 函数

## 基础课06 函数的概念及其表示

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| **考点考向** | **课标要求** | **真题印证** | **考频热度** | **核心素养** |
| 函数的概念及表示 | 了解 | 2023年上海卷  2022年北京卷 | ★☆☆ | 数学抽象  数学运算  逻辑推理 |
| 分段函数 | 理解 | 2023年北京卷  2022年浙江卷  2022年北京卷 | ★★★ | 数学运算  逻辑推理 |
| 命题分析预测 | 从近几年高考的情况来看，函数的概念及其表示是高考常考内容，一般以选择题的形式出现，试题较为简单.命题热点为函数解析式的应用，预计2025年高考命题情况变化不大 | | | |

### 基础知识·诊断

#### 夯实基础

##### 一、函数的有关概念

1.函数的概念

|  |  |
| --- | --- |
| 前提 | 集合,是两个①非空数集 |
| 对应关系 | 对于集合中的②任意一个数，按照某种确定的对应关系，在集合中都有③唯一确定的数和它对应 |
| 名称 | 称为从集合到集合的一个函数 |
| 记法 | ④， |

2.构成函数的三要素

|  |  |
| --- | --- |
| 定义域 | 在函数,中，叫作⑤自变量，的取值范围叫作函数的⑥定义域 |
| 值域 | 与的值相对应的值叫作函数值，函数值的集合叫作函数的⑦值域 |
| 三要素 | ⑧定义域、⑨对应关系、⑩值域是构成函数的三要素 |

3.表示函数的常用方法

|  |  |
| --- | --- |
| 解析法 | 一般情况下，必须注明函数的定义域 |
| 列表法 | 选取的自变量要有代表性，能反映定义域的特征 |
| 图象法 | 注意定义域对图象的影响：与轴垂直的直线与函数图象最多有一个公共点 |

##### 二、分段函数

|  |  |
| --- | --- |
| 定义 | 若函数在其定义域的不同子集上，因⑪对应关系不同而分别用几个不同的式子来表示，这种函数称为分段函数 |
| 相关概念 | 分段函数的定义域等于各段函数定义域的⑫并集，其值域等于各段函数值域的⑬并集，分段函数虽由几个部分组成，但它表示同一个函数 |

###### 知识 拓展

注意以下几个特殊函数的定义域：

（1）分式型函数：分母不为零的实数集合.

（2）偶次方根型函数：被开方式非负的实数集合.

（3）当为对数式时，函数的定义域是真数为正数、底数为正且不为1的实数集合.

（4）若，则定义域为.

（5）正切函数的定义域为.

#### 诊断自测

##### 题组1 走出误区

1. 判一判.（对的打“√”,错的打“×”）

（1） 函数与是同一个函数.( × )

（2） 函数的定义域为.( √ )

（3） 对于函数，其值域是集合.( × )

（4） 分段函数是由两个或几个函数组成的.( × )

2. （易错题）已知，则.

**【易错点】**本题容易忽视新元的取值范围.

[解析]令，则，，所以，所以.

##### 题组2 走进教材

3. （人教A版必修①P65· 例2（1）改编）函数的定义域为.

[解析]使根式有意义的实数的取值集合是，使分式有意义的实数的取值集合是，所以这个函数的定义域是,且，即.

4. （人教A版必修①P65·例2（2）改编）已知,若,则1或.

[解析]因为,所以,即,解得或.

##### 题组3 走向高考

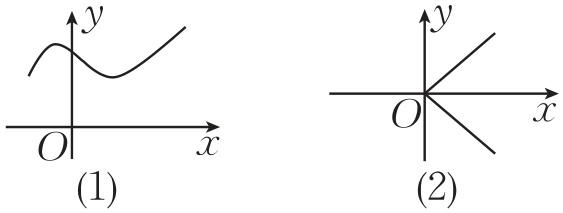
5. [2023·新高考Ⅱ卷改编]函数的定义域为.

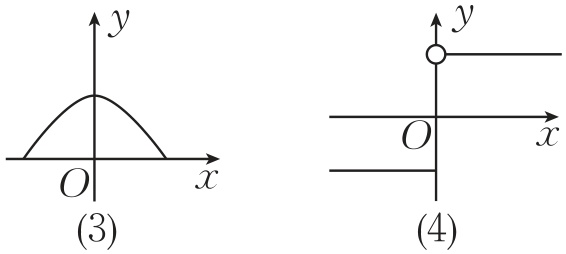
[解析]若函数有意义，则，解得或，所以函数的定义域为

### 考点聚焦·突破

#### 考点一 函数的概念［自主练透］

1. 在下列四个图象中，是函数图象的所有序号为( C ).





A. B. C. D.

[解析]根据函数的定义，一个自变量的值对应唯一一个函数值或者多个自变量的值对应唯一一个函数值，显然只有（2）不满足.故选.

2. 下列各组函数是同一函数的所有序号为( C ).

与；

与;

与;

与.

A. ①② B. ①③ C. ③④ D. ①④

[解析]对于①，的定义域为，的定义域为，又，所以与的定义域相同，但对应关系不同，故不是同一函数；

对于②,，所以与的对应关系相同，但的定义域为，而的定义域为，故不是同一函数；

对于③,的定义域为，的定义域为，且，，所以函数与的定义域和对应关系均相同，故是同一函数；

对于④,的定义域为，的定义域为，因此函数与的定义域和对应关系均相同，故是同一函数.故选.



1.函数的定义要求非空数集中任何一个元素在非空数集中有且只有一个元素与之对应，即可以“多对一”，但不能“一对多”，因此中有可能存在与中元素不对应的元素.

2.判断两个函数是否为同一函数，就是看构成函数的三要素是否完全相同，而在构成函数的三要素中，若定义域和对应关系相同，则值域一定相同.

#### 考点二 函数的定义域［多维探究］

##### 具体函数的定义域角度1

典例1 函数的定义域为,.

[解析]由题意可知解得且，则函数的定义域为,.

##### 抽象函数的定义域角度2

典例2 已知函数的定义域为，则函数的定义域为.

[解析]因为的定义域为，所以，解得,则函数的定义域为.

变式设问1 若将例2中的条件“函数的定义域为”改为“函数的定义域为”，则函数的定义域为.

[解析]因为的定义域为，所以，则函数的定义域为.

变式设问2 若将例2中的条件“函数的定义域为”改为“函数的定义域为”，则函数的定义域为.

[解析]由变式设问1可知函数的定义域为，所以，解得，，则函数的定义域为.



**求函数定义域的类型及解题策略**

|  |  |
| --- | --- |
| 求具体函数的定义域 | （1）求给定函数的定义域：已知解析式的函数，其定义域是使解析式有意义的自变量的取值集合，根据函数的解析式列出自变量满足的不等式（组），再求解即可.  （2）实际问题：由实际意义及函数解析式存在的意义列出自变量满足的不等式（组），再求解即可 |
| 求抽象函数的定义域 | 若已知函数的定义域为，则复合函数的定义域由不等式求出；  若已知函数的定义域为，则的定义域为在上的值域 |

##### 多维训练

1. [2024·安徽模拟]函数的定义域为( B ).

A. B. C. D.

[解析]要使函数有意义，则需要满足解得或，所以函数的定义域为,故选.

2. 若函数的定义域为，则函数的定义域是( B ).

A. B. C. D.

[解析]若函数的定义域为，则对于函数，有解得，因此函数的定义域是.故选.

#### 考点三 函数的解析式［多维探究］

##### 配凑法角度1

典例3 已知，则函数的解析式是.

[解析]因为，所以.

##### 换元法角度2

典例4 已知，则函数的解析式是.

[解析]因为，设，则，而，所以，所以，所以.

##### 待定系数法角度3

典例5 已知函数是一次函数，满足，则的解析式是或.

[解析]设，由题意可知，

所以解得或所以或.

##### 方程组法角度4

典例6 已知函数的定义域为，且，则的解析式是.

[解析]用代换，则，与联立可得，.



**求函数解析式的四种方法**

|  |  |
| --- | --- |
| 配凑法 | 由已知条件，可将改写成关于的表达式，然后用替代，即可得的表达式，注意自变量的取值范围 |
| 换元法 | 已知复合函数的解析式，可用换元法，此时要注意新元的取值范围，新元的取值范围即原函数的定义域 |
| 待定系数法 | 若已知函数的类型（如一次函数、二次函数），则可用待定系数法 |
| 方程组法 | 已知关于与或等函数的表达式，可根据已知条件再构造出另外一个等式组成方程组，通过解方程组求出 |

##### 多维训练

求下列函数的解析式：

（1） 已知，求函数的解析式；

[解析]（配凑法）因为，所以.

（2） 已知，求函数的解析式；

[解析]（换元法）令，则，

所以，所以.

（3） 已知是二次函数，若方程有两个相等的实数根，且，求函数的解析式；

[解析]（待定系数法）设，则，从而即所以，又，即有两个相等的实数根，所以，则，故.

（4） 已知满足，求函数的解析式.

[解析]（方程组法）因为,，

用替换得，，，

由得，，所以.

#### 考点四 分段函数［多维探究］

##### 分段函数求值角度1

典例7（1） 已知函数则( B ).

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

[解析]由题意得，

则.故选.

（2） 已知函数则2.

[解析]当时，，所以，

因为，所以.



**分段函数求值问题的解题策略**

先确定要求的值的自变量的取值属于哪一段区间，然后代入该段函数的解析式求值.当出现的形式时，应从内到外依次求值.

##### 分段函数与方程结合角度2

典例8 已知函数若，则( C ).

A. B. 0 C. 1 D. 2

[解析]由得，

由，得.

若，则，解得，舍去；

若，则，解得，符合题意.

综上，.故选.



**分段函数与方程结合问题的解题策略**

1.若分段函数中含有参数，则直接根据条件选择相应的解析式代入求参.

2.若是求自变量的值，则需要结合分段区间的范围对自变量进行分类讨论，再求值.

##### 分段函数与不等式结合角度3

典例9 设函数若，则的取值范围是.

[解析]当即时，，，由，得，因为，所以恒成立，所以；

当即时，，，由，得，即，即恒成立，所以；

当即时，，，由，得，即，所以.

综上所述，的取值范围是.



**分段函数与不等式结合问题的解题策略**

1.当自变量取值不确定时，往往需要分类讨论.

2.当自变量取值确定，但分段函数中含有参数时，只需依据自变量的情况，直接代入相应解析式.

##### 多维训练

1. 已知函数则的值是.

[解析]因为所以，所以.

2. [2024·海南模拟]（双空题）已知函数则1，若，则实数0或或1.

[解析]依题意得，.

当时，，则，解得或;

当时，，则，解得.

综上，或或.

3. 已知函数若，则实数的取值范围是.

[解析]作出函数的部分图象，如图所示，若，则，因为，结合图象可知，所以实数的取值范围是.

